

11.6. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS, STATISZTIKA

Klasszikus valószínűségi modell – megoldások

3777 *a)* Igen.

b) Nem, a valószínűség:

$$P\left(\overline{A+B}\right)=1-P(A+B)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}.$$

c) Nem, a valószínűség:

$$1-P(A+B)=1-\frac{11}{32}=\frac{21}{32}.$$

3778 $P(\text{legalább egy piros})=1-P(\text{nincs piros})=1-\frac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{4}}\approx 0{,}7.$

3779 $\frac{20}{20+t}<0{,}2,\quad \text{innen}\quad 80<t.$

3780 $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$

3781 $1-\frac{2}{108}=\frac{53}{54}.$

3782 $P(A)=\frac{1}{\binom{90}{5}}\approx 0{,}000000022\quad<\quad P(B)=\frac{1}{\binom{45}{6}}\approx 0{,}000000122\quad<\quad P(C)=\frac{1}{3^{14}}\approx 0{,}000000209.$

3783 $1-\left[P(0\text{ találat})+P(1\text{ találat})\right]=1-\left[\frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}}+\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}}\right]\approx 0{,}0233.$

3784 $1-\left[P(0\text{ találat})+P(1\text{ találat})+P(2\text{ találat})\right]=1-\left[\frac{\binom{6}{0}\cdot\binom{39}{6}}{\binom{45}{6}}+\frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{39}{5}}{\binom{45}{6}}+\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{39}{4}}{\binom{45}{6}}\right]\approx 0{,}0238.$

3785 $P(10)+\ldots+P(13+1)=\frac{\binom{13}{10}\cdot 2^3\cdot 3}{3^{14}}+\frac{\binom{13}{11}\cdot 2^2\cdot 3}{3^{14}}+\frac{\binom{13}{12}\cdot 2^1\cdot 3}{3^{14}}+\frac{2}{3^{14}}+\frac{1}{3^{14}}\approx 0{,}0016.$

3786 $P(\text{fémtető})=1-\left[P(\text{fekete alj})-P(\text{fekete alj és fémtető})\right]=0{,}48.$



3787 $P(\text{PF}) = P(\text{P}) + P(\text{F}) - 1 = 0{,}6 + 0{,}75 - 1 = 0{,}35$. Innen: 35 db.

3788 $P(\text{Peti nyer}) = p$. Ekkor $3p = 1 - p$, amiből $p = 0{,}25$ és így $P(\text{Gabi nyer}) = 1 - p = 0{,}75$.

3789 $P(\text{Hapci nyer}) - 0{,}3 = 1 - P(\text{Hapci nyer})$, ebből $P(\text{Hapci nyer}) = 0{,}35$. Tehát Hapci 13-szor, Vidor pedig 7-szer nyer.

3790 $P(\text{Peti nyer}) = p$. Ekkor $p + 2p + 3p = 1$, amiből $p = \frac{1}{6}$. Tomi 0,5 valószínűséggel nyer.

3791 Csaba 0 valószínűséggel nyer.

3792 $1 - \frac{7+8+5}{25} = 0{,}2$.

3793 $1 - (0{,}25 + 0{,}16 + 0{,}28) = 0{,}31$.

3794 *a)* A közös nevező 420. Ennyi darab (vagy ennek többszöröse) gyümölcsnek kell a ládában lennie.

b) $1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) = \frac{31}{420} < \frac{1}{3}$.

3795 *a)* $P(\text{lapos}) = 1 - [P(\text{lyukas}) + P(\text{kerek}) + P(\text{tömör})] = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}\right) = \frac{6}{15}$.

b) Tizenöt darab.

3796 $\left(\frac{7}{8}\right)^4 \approx 0{,}5862$.

3797 $p^4 = \frac{1}{81}$, amiből $p = \frac{1}{3}$. Pontosan kétszer.

3798 $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}5177$.

3799 *a)* $1 - 0{,}8^8 \approx 0{,}8322$. *b)* $(1 - 0{,}8)^8 \approx 0{,}00000256$.

3800 $1 - p^5 = 0{,}99999$, amiből $p = 0{,}1$.

3801 $\Omega = \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \ldots; \frac{29}{3}\right\}$, $A = \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \ldots; \frac{5}{3}\right\}$, $P(A) = \frac{5}{29}$.

3802 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A0}$: $p = \frac{3}{54} = \frac{1}{18}$.

3803 *a)* Egy csomag 32 lapos kártyapakliban négy ász, négy tízes és négy hetes lap található. Ha egyetlen értékes lap sincs a kezünkben, akkor az említett 12 lapon kívüli 20 darab lapból kell a leosztáskor kapnunk négyet. Ez a feladat által kérdezett kedvező esemény, az összes esetek száma pedig $\binom{32}{4}$. Így a keresett valószínűség:

$$P(\text{nincs értékes lap}) = \frac{\binom{20}{4}}{\binom{32}{4}} \approx 0{,}1347.$$



b) Ha legalább egy értékes lap kerül a kezünkbe, akkor az lehet egy, kettő, három vagy akár négy darab ász, tízes, hetes is. Ez több eset, sokkal egyszerűbb, ha kiszámoljuk az ellentett esemény valószínűségét (egy eset), majd kivonjuk 1-ből. Az ellentett esemény pedig éppen az *a)* pontban tárgyalt eset:

$$P(\text{van értékes lap}) = 1 - \frac{\binom{20}{4}}{\binom{32}{4}} \approx 0{,}8653.$$

c) A „legfeljebb három" értékes lap ismét több esetből tevődik össze: három, kettő, egy vagy nulla értékes lap van a leosztott négy lap között. Ismét egyszerűbb, ha áttérünk a komplementer esemény valószínűségének kiszámítására. Az, hogy mind a négy lap értékes $\binom{12}{4}$-féleképp lehet. Azaz:

$$P(\text{legfeljebb három értékes lap}) = 1 - \frac{\binom{12}{4}}{\binom{32}{4}} \approx 0{,}9862.$$

3804 *a)* Jelölje V a vörös hajú, S a szemüveges klubtagok közül egy fő kiválasztásának eseményét. Ekkor $P(V) = 0{,}82$ és $P(S) = 0{,}76$. Ismert, hogy a klubban minden tag bírja valamelyik tulajdonságot. Ezért

$$1 = P(V + S) = P(V) + P(S) - P(VS),$$

ahonnan egyszerű behelyettesítés után $P(VS) = 0{,}58$.

b) Már tudjuk:

$$P(VS) = 0{,}58 = \frac{58}{100} = \frac{29}{50}.$$

A szöveg szerint a klubnak 50 tagja van – ha ez az összes esetek száma, akkor 29 a kedvező esetek száma, azaz 29 mindkét tulajdonságot bíró egyén jár ebbe a klubba.

3805 Jelölje K azt az eseményt, hogy Teréz az ismerősei közül éppen kígyóbűvölőre, H pedig azt, hogy hastáncosokra kattint. Tudjuk, hogy $P(H) = 0{,}6$ és a $K + H$ esemény komplementerének 0,1 a valószínűsége. Azaz H, K és $\overline{K + H}$ lefedi Teréz összes ismerősét a weblapon.

Formulába öntve:

$$1 = P(\text{csak } K) + P(H) + 0{,}1.$$

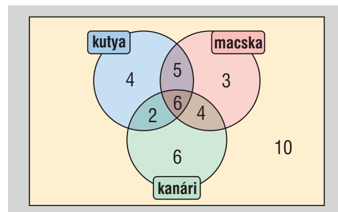
Innen adódik:

$$P(\text{csak } K) = 0{,}3 = \frac{3}{10} = \frac{30}{100}.$$

Ha tudjuk még azt is, hogy a számlálóban levő 30 a kedvező esetek száma, akkor a nevezőben csak az összes esetek száma lehet. Tehát a megoldás: ezen a napon ünnepelte Teréz, hogy immáron 100 ismerőssel büszkélkedhet.

3806 Készítsünk halmazábrát. A megoldás innen leolvasható:

$$P = \frac{11}{40}.$$





3807 Fontos az elején rögzítenünk, hogy Edének egy telefonszáma van, ez adja meg a kedvező esetek számát. Ferenc nem tudja, hogy mi a hívószám első két jegye (20, 30 vagy 70), ez 3 lehetőség. Két dologra emlékszik:

1. A következő 5 helyen van két 1-es, két 2-es és egy 4-es, ami $\frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!}=30$ lehetőség.
2. Az utolsó hét számjegyből álló szám hárommal osztható. Mivel ebből az első öt jegy összege 10, ezt az utolsó két számjeggyel úgy kell kiegészíteni, hogy 3-mal osztható legyen. Jó például a 02, 05, 08, 11, 14, 17, … végződés és így tovább, az utolsó szóba kerülő érték a 98. Ez összesen 32 darab szám.

Az összes feltételnek megfelelő hívószámok száma így $3\cdot 30\cdot 32=2880$. A megoldás:

$$P=1-\frac{1}{2880}\approx 0{,}999652.$$

3808 *a)* Jelölje a lovasok darabszámát n. Így az első lovas kivételének a valószínűsége: $\frac{n}{20+n}$. A másodiké már $\frac{n-1}{19+n}$, hiszen eggyel kevesebb lovas katona van, és eggyel kevesebb az összes ólomkatona száma is. Felírható a következő egyenlet:

$$\frac{1}{30}=\frac{n}{20+n}\cdot\frac{n-1}{19+n}.$$

Átalakítva másodfokú egyenletté:

$$0=29n^2-69n-380 \quad\Rightarrow\quad n_{1,2}=\frac{69\pm 221}{58}.$$

Csak az 5-öt fogadhatjuk el a részfeladat megoldásának, a negatív törtet nem.

b) Az előző részfeladat alapján eredetileg 20 gyalogos és 5 lovas katona volt a dobozban. Ha Jani minden lépésben kivesz a dobozból egy gyalogos katonát és beletesz egy lovast, akkor a dobozban levő katonák száma nem változik, mindig 25 marad. Viszont a lovasok száma lépésről lépésre növekszik, m lépés esetén $5+m$ lesz. Ezért az első lovas kivételének a valószínűsége $\frac{5+m}{25}$, a másodiké már $\frac{4+m}{24}$. Azt keressük, hogy a szorzatuk mikor növekedik 0,5 fölé:

$$\frac{5+m}{25}\cdot\frac{4+m}{24}>0{,}5.$$

Kifejtve és rendezve:

$$m^2+9m-280>0.$$

Megoldva az egyenlőtlenséget, $m<-21{,}8$ vagy $m>12{,}8$ egy tizedesre kerekítve. Vagyis Janinak legalább 13 cserét végre kellett hajtania. ($m=13$ esetén a keresett valószínűség éppen 0,51.)

3809 *a)* A feladat szövegében szerepel a „legalább egyet” kifejezés, ezért térjünk át a komplementer eseményre: „egyet sem”. Annak a valószínűsége, hogy a villamos vezetője egy ajtót sem nyit ki a nyolcból: $(1-p)^8$. Így a kérdezett valószínűség:

$$1-(1-p)^8.$$

b) Meg kell oldanunk a következő egyenlőtlenséget:

$$1-(1-p)^8>0{,}5.$$

Rendezve és nyolcadik gyököt vonva:

$$0{,}917>1-p \quad\Rightarrow\quad p>0{,}083.$$

Ha ezen kis valószínűségnél nagyobb valószínűséggel nyit ki egy ajtót, akkor már 0,5-nél nagyobb valószínűséggel nyit ki legalább egyet egy állomáson.



3810 Jelöljük a szóba kerülő eseményeket a következőképpen. Szerénke Károly bácsi ölében ül: *SK*. Lukrécia Károly bácsi ölében ül: *LK*. Szerénke Irma néni ölében ül: *SI*. Lukrécia Irma néni ölében ül: *LI*. A feltételek szerint ez a négy esemény kizárja egymást.

a) A szöveg szerint $P(SK) = 0{,}2$ és $P(LK) = 0{,}15$, valamint $P(SI + LI) = 0{,}55$. A kérdés azt firtatja, hogy mekkora valószínűséggel nem ül macska az öregek ölében, azaz a megadottak összegének komplementerét. Számítsuk ki hát:

$$P(\text{senki ölében nem ül macska}) = 1 - P(SK + LK + SI + LI) =$$
$$= 1 - (0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}55) = 0{,}1.$$

b) Tekintsük a táblázatot, amiben $P(SI) = x$, $P(LI) = y$. Ekkor a feltételek szerint

$$x + y = 0{,}55,$$

továbbá

$$y + 0{,}15 > x + 0{,}2,$$

mégpedig 0,1-del.

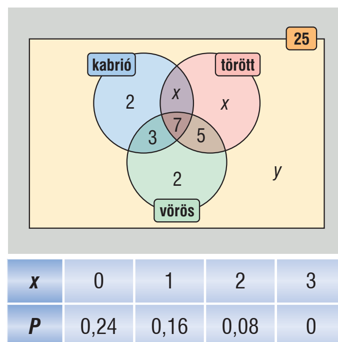
	Károly bácsi ölében	Irma néni ölében	
Szerénke	0,20	x	**x + 0,20**
Lukrécia	0,15	y	**y + 0,15**
	0,35	**0,55**	

Meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0{,}55 \\ y + 0{,}15 &= x + 0{,}2 + 0{,}1 \end{aligned}\right\}.$$

Ennek megoldása: $x = 0{,}2$ (és $y = 0{,}35$). Azaz Szerénke ugyanakkora valószínűséggel ül mindkét öreg ölében.

3811 Rajzoljunk halmazábrát, és töltsük ki belülről kifelé haladva. Vörös törött kabrióból a megadott valószínűség alapján 7-et találunk, vörös kabrióból pedig 10-et (így nem törött vörös kabrió 3 van). Hasonlóan 2 darab jó állapotú nem vörös színű kabriót találunk és ugyanennyi jó állapotú, vörös színű, de nem kabrió sportkocsit.



Azt is tudjuk, hogy van 5 darab törött, vörös nem kabrió autó a versenyen. A maradék két helyre ugyanazt a számot kell írnunk, és összesen 25 autó indult. Ebből adódik, hogy x 0, 1, 2 vagy 3 lehet. Ekkor pedig y lehet rendre 6, 4, 2 vagy 0. A lehetséges valószínűségeket a táblázatban találjuk.

x	0	1	2	3
P	0,24	0,16	0,08	0

3812 *a)* Annak a valószínűsége, hogy egy szoba takarítható, illetve annak is, ha nem, egyaránt 0,5. A „legalább egy szoba takarítható” kitétel miatt érdemes áttérnünk a komplementer esemény valószínűségére: „egy szoba sem takarítható”. Ez utóbbinak a valószínűsége n szoba esetén $0{,}5^n$. Mivel ez a komplementer esemény, így a következő egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$1 - 0{,}5^n > 0{,}999.$$

Átrendezve:

$$0{,}001 > 0{,}5^n.$$

Mindkét oldalnak véve a 0,5 alapú logaritmusát, a relációjel megfordul (az $f(x) = \log_{0{,}5} x$ függvény szigorúan monoton csökkenő):

$$\log_{0{,}5} 0{,}001 < n.$$

Előbbi értéke:

$$\frac{\lg 0{,}001}{\lg 0{,}5} \approx 9{,}966.$$

Így legalább 10 szoba van a hotelben.



b) Jelölje p annak a valószínűségét, hogy egy szoba a személyzet számára megközelíthető, és legyen a hotelben n szoba. Két ismeretlen van, így szükségünk lesz két egyenletre is. Az első feltételnek („legalább egy szoba") vegyük a komplementer eseményét, ekkor

$$1 - p^n = 0{,}79.$$

A második feltétel egyszerűbb:

$$(0{,}75 \cdot p)^{n+2} = 0{,}01.$$

Meg kell tehát oldanunk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} p^n &= 0{,}21 \\ (0{,}75 \cdot p)^{n+2} &= 0{,}01 \end{aligned}\right\}.$$

Vegyük mindkét egyenlet mindkét oldalának 10-es alapú logaritmusát (ezt megtehetjük, hiszen a logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés). Használjuk ki a logaritmus azonosságait is:

$$\left.\begin{aligned} n \cdot \lg p &= \lg 0{,}21 \\ (n+2) \cdot (\lg p + \lg 0{,}75) &= -2 \end{aligned}\right\}.$$

Életünk egyszerűbbé tételéhez vezessük be a $\lg p = x$ jelölést (a feladat amúgy sem kérdezi a valószínűség értékét):

$$\left.\begin{aligned} n \cdot x &= \lg 0{,}21 \\ (n+2) \cdot (x + \lg 0{,}75) &= -2 \end{aligned}\right\}.$$

Megjegyzés: Alkalmazhatjuk azt a trükköt is, hogy $\lg 0{,}21$ és $\lg 0{,}75$ helyére is betűket írunk és paraméterként számolunk velük. Így elegendő csak a végeredmény közvetlen kiszámításakor behelyettesíteni őket.

Az egyenletrendszer megoldásakor érdemes az első egyenletből kifejezni az x ismeretlent, és behelyettesíteni azt a második egyenletbe. Így az alábbi másodfokú egyenlethez jutunk:

$$\lg 0{,}75 \cdot n^2 + (\lg 0{,}21 + 2 \cdot \lg 0{,}75 + 2) \cdot n + 2 \cdot \lg 0{,}21 = 0.$$

Ennek megoldásai: $n_1 = 1{,}5$ és $n_2 = 7{,}0$. Az 1,5 értéket nem fogadjuk el, a hotelben tehát jelenleg hét szoba van.

3813 Vegyük észre, hogy a függvény átalakítható $f(x) = (x - A) \cdot (x - B)$ alakúvá. Ilyen formában már tudjuk a zérushelyeket is: $x_1 = A$ és $x_2 = B$. Mit tudunk A és B számokról? $A < B$ egészek, továbbá $1 \le A,\ B \le 9$.

Az összes esetek száma: $8 + 7 + 6 + \ldots + 1 = 36$. A táblázatban látjuk a magyarázatot is:

***A* értéke**	8	7	6	5	4	3	2	1
***B* lehet**	9	8, 9	7, 8, 9	6, 7, 8, 9	5, …, 9	4, …, 9	3, …, 9	2, …, 9
Számuk	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

A kedvező esetek számához is írjunk fel egy hasonló táblát:

***A* értéke**	1	2	3	4	5
***B* lehet**	5, 6, 7, 8, 9	6, 7, 8, 9	7, 8, 9	8, 9	9
Számuk	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

A kedvező esetek száma: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

A keresett valószínűség tehát $\dfrac{15}{36}$.



3814 *a)* Először is próbáljuk meg rendszerezni az adatokat. Talán a legjobb, ha készítünk egy táblázatot, hiszen mindhárom ládában ugyanolyan méretű csavarokat találunk. Fontos megjegyeznünk, hogy a táblázatban található események egymást kizáró események, így valószínűségeik összeadhatók.

	1. ládában	2. ládában	3. ládában	Összesen
10-es csavar	50	10	20	**80**
12-es csavar	70	x	40	**110 + x**
14-es csavar	30	80	y	**110 + y**
Összesen	**150**	**90 + x**	**60 + y**	**300 + x + y**

Ha minden láda tartalma kiborul a földre, akkor $\frac{x}{300+x+y}$ valószínűséggel fogunk közülük felvenni a második ládából való tizenkettes csavart és $\frac{y}{300+x+y}$ valószínűséggel a harmadik ládából való tizennégyes csavart. Ez a kettő is összeadható, így a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{x}{300+x+y}+\frac{y}{300+x+y}=\frac{1}{3}.$$

Furcsának tűnhet, hogy nincs két egyenletünk, de ha jobban belegondolunk, nincs is rá szükség. Az *a)* kérdés ugyanis azt firtatja, hogy mennyi csavarunk van összesen, aminek megválaszolásához elegendő az $x+y=z$ összeg kiszámítása:

$$\frac{z}{300+z}=\frac{1}{3}.$$

Ennek megoldása: $z=150$, vagyis összesen 450 csavar van a három ládában.

b) A második kérdésben módosul a táblázatunk. Immár csak egy ismeretlennel kell számolni, hiszen Sanyi a harmadik ládában található összes tizennégyes csavart felhasználta.

	1. ládában	2. ládában	3. ládában	Összesen
10-es csavar	50	10	20	**80**
12-es csavar	70	x	40	**110 + x**
14-es csavar	30	80	0	**110**
Összesen	**150**	**90 + x**	**60**	**300 + x**

Mivel a 3. ládában nincs 14-es, egy-egy különböző méretű csavart négyféleképpen lehet kivenni a három ládából. A táblázat a négy esetet tartalmazza.

	A húzott csavar			
1. ládából	14	12	14	10
2. ládából	12	14	10	14
3. ládából	10	10	12	12

Ezen esetek valószínűségeire:

$$\frac{30}{110}\cdot\frac{x}{110+x}\cdot\frac{20}{80}+\frac{30}{110}\cdot\frac{40}{110+x}\cdot\frac{10}{80}+\frac{80}{110}\cdot\frac{70}{110+x}\cdot\frac{20}{80}+\frac{80}{110}\cdot\frac{40}{110+x}\cdot\frac{50}{80}=\frac{40}{187}.$$

A lehetséges egyszerűsítések és összevonások után:

$$\frac{6x+2840}{88\cdot(110+x)}=\frac{40}{187},\qquad \text{amiből}\qquad x=60.$$

A második ládában így eredetileg 60 tizenkettes, a harmadik ládában 90 tizennégyes csavar volt.



c) A kérdés megválaszolásához vizsgáljuk meg az előbb kapott $\frac{6x+2840}{88\cdot(110+x)}$ kifejezést (függvényt).
Alakítsuk át, hogy jobban lássuk a reciprokfüggvényt:

$$f(x)=\frac{6x+2840}{88\cdot(110+x)}=\frac{3}{44}\cdot\frac{x+110+\frac{1090}{3}}{x+110}=\frac{3}{44}\cdot\left(1+\frac{\frac{1090}{3}}{x+110}\right)=\frac{3}{44}+\frac{\frac{1090}{44}}{x+110}.$$

A fenti függvény írja le a kérdezett valószínűség változását a második ládában levő tizenkettes csavarok x számának függvényében. Amennyiben $x=0$, úgy $f(0)\approx 0{,}2934$, majd a függvény szigorúan monoton csökken, de nem éri el a $\frac{3}{44}\approx 0{,}0682$ értéket – hiszen mindig adunk hozzá egy pozitív, de egyre kisebb számot.

Megjegyzés: Ha ábrázoljuk, a függvény hozzávetőleges ábrája is szemlélteti az eredményeket.

Visszatevéses mintavétel – megoldások

3815 *a)* $0{,}87^5\approx 0{,}4982$; *b)* $0{,}13^5\approx 0{,}000037$.

3816 *a)* $0{,}3^6=0{,}000729$; *b)* $0{,}7^6=0{,}117649$.

3817 *a)* $4\cdot 0{,}35^3\cdot 0{,}65=0{,}111475$; *b)* $7\cdot 0{,}35\cdot 0{,}65^6\approx 0{,}1848$.

3818 *a)* $3\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^2\cdot\frac{1}{20}=0{,}135375$; *b)* $9\cdot\frac{19}{20}\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^8\approx 3{,}34\cdot 10^{-10}$.

3819 $\binom{10}{7}\cdot\left(\frac{24}{30}\right)^7\cdot\left(\frac{6}{30}\right)^3\approx 0{,}2$.

3820 *a)* $\left(\frac{1}{3}\right)^5\approx 0{,}0041$; *b)* $\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\approx 0{,}0494$;

c) $5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\frac{2}{3}\approx 0{,}0412$.

3821 $P(A)=\binom{20}{3}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{17}\approx 0{,}1901\ >\ P(B)=\binom{25}{4}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^4\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{21}\approx 0{,}1384$.

3822 $P(A)=\binom{7}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\ =\ P(B)=\binom{7}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\ \approx\ 0{,}2734$.

3823 *a)* $p_{\text{fej}}{}^2=0{,}49\ \Rightarrow\ p_{\text{fej}}=0{,}7$; *b)* $(1-p_{\text{fej}})^2=0{,}81\ \Rightarrow\ p_{\text{fej}}=0{,}1$.

3824 $\binom{10}{7}\cdot p^7\cdot(1-p)^3>\binom{10}{8}\cdot p^8\cdot(1-p)^2\ \Rightarrow\ \frac{8}{11}>p$.

3825 A „tízből legfeljebb nyolcat” kitétel miatt (ez kilenc elemi esemény) érdemes áttérnünk a komplementer eseményre, ami „tízből legalább kilencet”. Ez kilenc vagy tíz ászt jelent tíz szervából. Tudjuk, hogy az ász valószínűsége 0,2; így a megoldás:

$$P(\text{legfeljebb nyolc ász szerva})=1-\left[\binom{10}{9}\cdot 0{,}2^9\cdot 0{,}8^1+\binom{10}{10}\cdot 0{,}2^{10}\cdot 0{,}8^0\right]\approx 0{,}999996.$$



3826 Az összetett számok közül csak a 4-et és a 6-ot dobhatjuk, így az „összetett dobás” valószínűsége $\frac{1}{3}$.
Mivel legalább kétszer szeretnénk ezt dobni, így az eseményt hét elemi esemény alkotja: 2, 3, 4, 5, 6, 7 vagy 8 alkalommal dobunk összetett számot. Ez elég sok esemény. Térjünk át a komplementerre, ahol csak két esetet kell kiszámolnunk: amikor nincs összetett szám és amikor csak egy darab van. A keresett valószínűség:

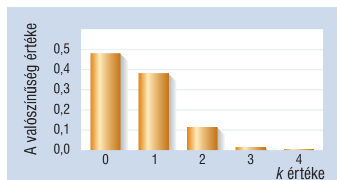
$$P(\text{legalább kétszer dobunk összetett számot}) = 1 - \left[\binom{8}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^8 + \binom{8}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^7\right] \approx 0{,}8050.$$

3827 Ne ugorjunk be a feladatnak! Bár a szövegben szerepel a „legalább” kifejezés, ez pont így jelent kevesebb esetet. A „hétből legalább öt” találat az öt, hat vagy hét találatot (3 elemi esemény) foglalja magában, ellentétben a komplementerével, ami a 0, 1, 2, 3, 4 (5 elemi esemény) eseteket foglalja magában. A megoldás így:

$$P(\text{legalább öt találat}) = \binom{7}{5}\cdot 0{,}3^5\cdot 0{,}7^2 + \binom{7}{6}\cdot 0{,}3^6\cdot 0{,}7^1 + \binom{7}{7}\cdot 0{,}3^7\cdot 0{,}7^0 \approx 0{,}0288.$$

3828 Ha négyszer dobunk a kockával, akkor dobhatunk 0, 1, 2, 3 vagy 4 hatost. Fel kell írnunk minden eset valószínűségét, majd ábrázolnunk őket oszlopdiagramon. Az egyszerűség kedvéért jelölje k, hogy hány hatost dobtunk a négy dobásból.

Megjegyzés: Az itt megadott eseményeket együtt teljes eseményrendszernek nevezzük.



$$P(k=0) = \binom{4}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}482253;\quad P(k=1) = \binom{4}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}385802;$$

$$P(k=2) = \binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0{,}115741;\quad P(k=3) = \binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1 \approx 0{,}015432;$$

$$P(k=4) = \binom{4}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0 \approx 0{,}000772.$$

3829 A dolgozatnak nyolc feladata van, ezek közül 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 darabot tudhat Jani. Ezt a kilenc esetet kell áttekintenünk, és kiválasztani közülük a legnagyobb valószínűséggel bekövetkezőt. Most k azt jelöli, hogy Jani hány feladatot tud megoldani a dolgozat nyolc példájából.

$$P(k=0) = \binom{8}{0}\cdot 0{,}6^0\cdot 0{,}4^8 \approx 0{,}000655;\quad P(k=1) = \binom{8}{1}\cdot 0{,}6^1\cdot 0{,}4^7 \approx 0{,}007864;$$

$$P(k=2) = \binom{8}{2}\cdot 0{,}6^2\cdot 0{,}4^6 \approx 0{,}041288;\quad P(k=3) = \binom{8}{3}\cdot 0{,}6^3\cdot 0{,}4^5 \approx 0{,}123863;$$

$$P(k=4) = \binom{8}{4}\cdot 0{,}6^4\cdot 0{,}4^4 \approx 0{,}232243;\quad P(k=5) = \binom{8}{5}\cdot 0{,}6^5\cdot 0{,}4^3 \approx 0{,}278692;$$

$$P(k=6) = \binom{8}{6}\cdot 0{,}6^6\cdot 0{,}4^2 \approx 0{,}209019;\quad P(k=7) = \binom{8}{7}\cdot 0{,}6^7\cdot 0{,}4^1 \approx 0{,}089579;$$

$$P(k=8) = \binom{8}{8}\cdot 0{,}6^8\cdot 0{,}4^0 \approx 0{,}016796.$$

Jani a legnagyobb valószínűséggel öt feladatot fog jól megoldani a dolgozat során. Ám akkor sem lepődünk meg, ha négy vagy hat feladattal birkózik meg.

Megjegyzés: Figyeljük meg, mennyire kevés a szélső esetek valószínűsége! A 0, 1, 8 esetek valószínűségei együtt nem érik el a 0,02-ot.



3830 Jelölje például egy dobás esetén a fej valószínűségét p. Mivel annak az esélye, hogy két dobásból egy fej és egy írás lesz, 0,18, a következő egyenletet kell megoldanunk:

$$P(k=1)=\binom{2}{1}\cdot p^1\cdot(1-p)^1=0{,}18.$$

Nem muszáj felírni a fenti formulát, elegendő két dolgot meggondolnunk. Ha p valószínűsége van a fejnek, akkor $(1-p)$ van az írásnak. Másrészt vagy elsőre, vagy másodikra dobunk fejet, ami két eset. Így ugyanazt az egyenletet kapjuk kicsit egyszerűbben:

$$2\cdot p\cdot(1-p)=0{,}18.$$

Bármelyik egyenletet átalakítva:

$$0=p^2-p+0{,}09.$$

Megoldásai: $p_1=0{,}9$ és $p_2=0{,}1$. Mindkét megoldás jó.

Megjegyzés: Azért kaptunk olyan számokat, melyek összege 1, mert a feladat szimmetrikus fejre és írásra.

3831 Jelölje p annak a valószínűségét, hogy egy sorsjeggyel nyerünk, k pedig a nyertes szelvények számát. Ekkor a „hatból kétszer nyerünk” esélye:

$$P(k=2)=\binom{6}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^4.$$

A „hatból kétszer veszítünk” esélye megegyezik a „hatból négyszer nyerünk” esélyével:

$$P(k=4)=\binom{6}{4}\cdot p^4\cdot(1-p)^2.$$

A szöveg szerint a formulák értékei egyenlőek:

$$\binom{6}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^4=\binom{6}{4}\cdot p^4\cdot(1-p)^2.$$

Egyszerűsítsünk p^2-tel és $(1-p)^2$-tel, majd a $\binom{6}{2}=\binom{6}{4}$ binomiális együtthatókkal:

$$(1-p)^2=p^2.$$

Mivel $0\le p\le 1$, így gyökvonás után elhagyható az abszolút érték:

$$1-p=p \quad\Rightarrow\quad p=0{,}5.$$

Ez egy nagyon jó sorsjegy, nagy valószínűséggel minden második nyer! Kár, hogy ilyen sorsjegyet a valóságban nem lehet kapni.

3832 Jelölje p az „egy dobásból ötöst dobunk” valószínűségét, k pedig, hogy hányszor következett be az „ötös dobás”. A „hét dobásból négy ötös” valószínűsége ekkor:

$$P(k=4)=\binom{7}{4}\cdot p^4\cdot(1-p)^3.$$

A „hét dobásból hat ötös” valószínűsége:

$$P(k=6)=\binom{7}{6}\cdot p^6\cdot(1-p)^1.$$

Azt szeretnénk, hogy a második nagyobb legyen, mint az első:

$$\binom{7}{4}\cdot p^4\cdot(1-p)^3<\binom{7}{6}\cdot p^6\cdot(1-p)^1.$$

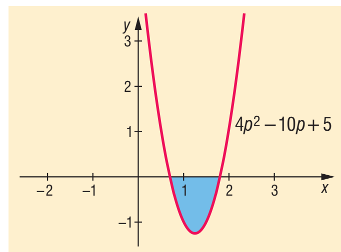


Számítsuk ki a binomiális együtthatókat, majd egyszerűsítsünk, amivel csak lehet. Rendezzük egy oldalra az egyenlőtlenséget:

$$4p^2 - 10p + 5 < 0.$$

A megoldások: $p_1 \approx 1{,}81$ és $p_2 \approx 0{,}69$. A másodfokú egyenlőtlenség megoldásához ábrázoljuk a kifejezéssel leírható parabolát. Azt keressük, ahol a kifejezés 0-nál kisebb (azaz, ahol az x tengely „alatt” található):

$$0{,}69 < p < 1{,}81.$$



Ám mivel p valószínűség, értéke legfeljebb 1 lehet, amit el is érhet. Tehát a végső megoldás:

$$0{,}69 < p \le 1.$$

3833 Jelölje az írás valószínűségét egy feldobás esetén x. Ezt az x értéket úgy szeretnénk megadni, hogy az írás maximális valószínűséggel következzen be hat dobásból ötször.

Meg kell hát adnunk egy függvényt, amely x változó függvényében leírja a keresett valószínűséget. A binomiális eloszlást hívjuk segítségül:

$$f(x) = \binom{6}{5} \cdot x^5 \cdot (1 - x) = 6x^5 \cdot (1 - x) = 6 \cdot \left(x^5 - x^6\right).$$

Ez egy hatodfokú függvény. Természetesen adódik $f(x)$ értelmezési tartományára a $[0; 1]$ zárt intervallum, hiszen x az írás valószínűsége. A függvény mindenütt pozitív, kivéve a két zérushelyet: $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$. Ezen függvénynek keressük a maximumát.

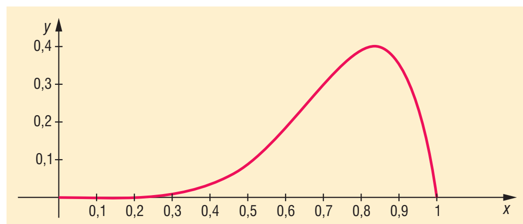
Ilyen magas fokú görbéket (még) nem áll módunkban elemezni, ezért hagyatkozzunk a számítógép vizsgálatára.

Eszerint a függvény maximumhelye:

$$x_{max} = \frac{5}{6} \approx 0{,}8333,$$

a maximum értéke pedig

$$y_{max} = f\left(\frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0{,}4019.$$



Amennyiben ezt állítjuk be az érmén az írás valószínűségének, akkor nagy valószínűséggel hat dobásból ötször fogunk írást kapni.

Megjegyzés: Ha majd tanulunk deriválni, akkor deriválással egyetlen sorban megoldhatjuk a feladatot:

$$f'(x) = 6 \cdot \left(x^5 - x^6\right)' = 6 \cdot \left(5x^4 - 6x^5\right) = 6 \cdot x^4 \cdot (5 - 6x).$$

Az eredeti függvénynek ott van szélsőértéke, ahol az első derivált nulla, és előjelet vált. Jelen esetben ez a már felírt értékre következik be.

3834 Ha a hatból két faluban nincs sem fel-, sem leszálló utas, akkor négy helyen van. A keresett egyenlet:

$$\binom{6}{2} \cdot p^2 \cdot (1 - p)^4 = 0{,}01536 \cdot 2^4 = 0{,}24576.$$

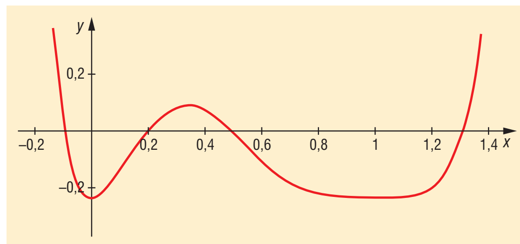
A binomiális együtthatót számoljuk ki, fejtsük ki a zárójelet a binomiális tétel alapján. Végezzük el a beszorzásokat, és rendezzük egy oldalra az egyenletet:

$$15p^6 - 60p^5 + 90p^4 - 60p^3 + 15p^2 - 0{,}24576 = 0.$$



Általában hatodfokú egyenletet nem tanultunk megoldani, és később sem fogunk. Lehetséges azonban közelítő megoldásokat keresni, a számítógép erre kiváló. A négy megoldásból minket csak az a kettő érdekel, amelyek a $[0;\, 1]$ intervallumba esnek. Az egyik megoldás ráadásul véges:

$$p_1 = 0{,}2 \quad \text{és} \quad p_2 = 0{,}48769.$$



Megjegyzés: Ha behelyettesítjük az értékeket, akkor $p = 0{,}2$-re pontosan 0,24576-t kapunk, azonban $p = 0{,}48769$-re „csak” 0,245759487-t. Nem a számítógép tévedett, egyszerűen a kerekítés pontatlanságából adódik a megoldás hibája.

3835 Mivel a hét egybevágó körcikk bármelyikének kiforgatása $\frac{1}{7}$ valószínűséggel következik be, ennyi a főnyeremény valószínűsége is. Tételezzük fel, hogy a kilenc forgatásból k esetben következett be a főnyeremény:

$$\binom{9}{k} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^k \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{9-k} = 0{,}25.$$

Alakítsuk át a bal oldali kifejezést a hatványozás azonosságai szerint:

$$\binom{9}{k} \cdot \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^k}{\left(\frac{6}{7}\right)^k} \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^9 = 0{,}25.$$

Folytatva ezt kapjuk:

$$\binom{9}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^9 = 0{,}25.$$

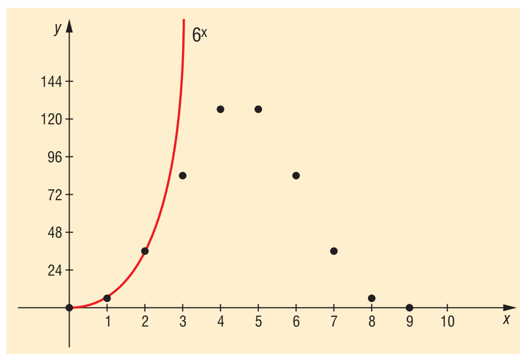
Osszunk le a kilencedik hatvánnyal (kerekítsünk), és szorozzunk át 6^k-nal:

$$\binom{9}{k} = 6^k.$$

I. megoldás. A 6^x exponenciális függvényről tudjuk, hogy szigorúan monoton növő. Szintén ismert, hogy a binomiális együttható értékei véges sokan vannak, és szimmetrikusak:

$$\binom{9}{k} = \binom{9}{9-k}.$$

Tehát $k = 4$ után nem növekedik tovább, hanem csökken. Két megoldást találunk: rögtön a $k = 0$ értékre teljesül az egyenlőség, majd $k = 2$-re is. A kifejezések tulajdonságai miatt több megoldás nincs.



II. megoldás. Fejtsük ki a binomiális együtthatót. Számlálójában 9! szerepel, amiben összesen négy darab 3-as prímtényezőt találunk. Ez azért érdekes, mert $6^k = 2^k \cdot 3^k$. Tehát k maximum 4 lehet. Ám ha hozzávesszük, hogy $k!$ vagy $(n-k)!$ egyike legalább 4!, akkor így az egyik 3-as prímmel le is egyszerűsítünk, azaz csak a $k = 0, 1, 2, 3$ eseteket szükséges megvizsgálni. Ezek közül $k = 0$ és $k = 2$ megoldás.



3836 *a)* A lehetséges esetek összegyűjtésekor az elvesztett 400 eurót kell 10 darab 50 eurós és/vagy 100 eurós, valamint 0 eurós részekre (partíciókra) bontanunk. 50 eurósból csak páros sok kerülhet a partíciókba, 100 eurós pedig legfeljebb négy.

100 eurós	4	3	2	1	0
50 eurós	0	2	4	6	8
0 eurós	6	5	4	3	2

b) A fenti táblázat oszlopainak valószínűségeit kell meghatározni és összegezni. Ez nem is olyan egyszerű! Gondoljuk meg: az eddigi feladatokban csak és kizárólag olyan kérdésekkel foglalkoztunk, amelyekben egy p valószínűségű esemény és annak $(1-p)$ valószínűségű komplementere szerepelt. Most viszont három eseményünk van. Nézzünk kicsit más szemmel a korábbi két esetre! Tekinthetjük úgy is, mint két eseményt, amelyek egymást kizárják, de egyben kiegészítik egymást a teljes eseménytérre – azaz teljes eseményrendszert alkotnak. Ezt már általánosíthatjuk három (de akár több) eseményre is:

$$p_1 = P(\text{100 euró kifizetése}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3;$$

$$p_2 = P(\text{50 euró kifizetése}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0,2;$$

$$p_3 = P(\text{nincs kifizetés}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Az eddigi formulák elején szereplő $\binom{n}{k}$ binomiális együttható kifejtve $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. Ez azt jelenti, hogy a k darab eseményt és az $(n-k)$ darab komplementer eseményt pontosan ennyiféleképpen tudjuk sorba rakni (ismétléses permutáció). Természetesen olvashatjuk kiválasztásnak is: n helyre választunk ki k darab egyfajta elemet. (A két formula megegyezik.) Három elemre nem alkalmazhatjuk a kombinációs meggondolást, azonban alkalmazhatjuk az ismétléses permutációt! Például a fenti táblázat második oszlopát tekintve, az összes lehetséges sorba kell raknunk 3 darab 100 eurós, kettő darab 50 eurós és 5 darab 0 eurós kifizetést. Ezt pedig $\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 5!}$-féleképpen tehetjük meg. Ezzel az eset felírásával készen vagyunk:

$$P(\text{2. oszlop}) = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 5!}\cdot 0,3^3\cdot 0,2^2\cdot 0,5^5 = 0,08505.$$

Ugyanígy fel kell írnunk a táblázat többi oszlopára is a valószínűségeket, majd ezeket összeadni. Az eredmények:

$$P(\text{1. oszlop}) = \frac{10!}{4!\cdot 0!\cdot 6!}\cdot 0,3^4\cdot 0,2^0\cdot 0,5^6 = 0,026578;$$

$$P(\text{3. oszlop}) = \frac{10!}{2!\cdot 4!\cdot 4!}\cdot 0,3^2\cdot 0,2^4\cdot 0,5^4 = 0,02835;$$

$$P(\text{4. oszlop}) = \frac{10!}{1!\cdot 6!\cdot 3!}\cdot 0,3^1\cdot 0,2^6\cdot 0,5^3 = 0,002016;$$

$$P(\text{5. oszlop}) = \frac{10!}{0!\cdot 8!\cdot 2!}\cdot 0,3^0\cdot 0,2^8\cdot 0,5^2 = 0,0000288.$$

Összegük négy tizedesre kerekítve: $p = 0,1420$.

Megjegyzés: A két komplementer eseményből felírt összes eset valószínűségeit *binomiális eloszlásnak,* a több, teljes eseményrendszert alkotó eseményből felírt összes eset valószínűségeit együtt *polinomiális eloszlásnak* nevezzük.



Mintavétel visszatevés nélkül – megoldások

3837 $\frac{\binom{28}{2}}{\binom{30}{2}} \approx 0{,}869.$

3838 *a)* $\frac{\binom{27}{10}}{\binom{135}{10}} \approx 0{,}000000021;$ *b)* $\frac{\binom{108}{10}}{\binom{135}{10}} \approx 0{,}09832.$

3839 $\frac{\binom{7}{6}}{\binom{13}{6}} \approx 0{,}004.$

3840 $\frac{\binom{15}{4}}{\binom{27}{4}} \approx 0{,}0778.$

3841 $\frac{\binom{7}{5}}{\binom{17}{5}} \approx 0{,}0034.$

3842 $\frac{\binom{11}{4}}{\binom{17}{10}} \approx 0{,}017.$

3843 $\frac{\binom{27}{4} \cdot \binom{31}{4}}{\binom{58}{8}} \approx 0{,}2881.$

3844 $\frac{\binom{42}{7} \cdot \binom{21}{3}}{\binom{63}{10}} \approx 0{,}2807.$

3845 $\frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{10}{5}} \approx 0{,}2381.$



3846 A „legalább 3” feltétel miatt össze kellene számolnunk a 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 bogár esetek valószínűségeit, ez hosszadalmas. Jobban járunk, ha áttérünk a komplementer eseményre. Ebben csak a 0, 1, 2 esetek vannak. Így a keresett valószínűség:

$$1-\left[\frac{\binom{135}{15}\cdot\binom{92}{0}}{\binom{227}{15}}+\frac{\binom{135}{14}\cdot\binom{92}{1}}{\binom{227}{15}}+\frac{\binom{135}{13}\cdot\binom{92}{2}}{\binom{227}{15}}\right]\approx 0{,}9788.$$

3847 Mivel mindkét csapatból kell ott lennie játékosnak, így az öt fő a következő párosításokból állhat össze: 1–4, 2–3, 3–2, 4–1. Igazából csak a 0–5, 5–0 esetekben nem teljesül Klári megállapítása. Bár nem sok a direkt esetek száma sem, itt mi a komplementert írjuk fel:

$$1-\left[\frac{\binom{11}{5}\cdot\binom{11}{0}}{\binom{22}{5}}+\frac{\binom{11}{0}\cdot\binom{11}{5}}{\binom{22}{5}}\right]\approx 0{,}9649.$$

3848 A 17 fiú és a 23 lány együtt 40 fős csapatot képez.

a) A „csak azonos neműek” lehetnek csak fiúk vagy csak lányok. Mivel két egymást kizáró esetről van szó, valószínűségeiket egyszerűen összeadhatjuk:

$$\frac{\binom{17}{7}\cdot\binom{23}{0}}{\binom{40}{7}}+\frac{\binom{17}{0}\cdot\binom{23}{7}}{\binom{40}{7}}\approx 0{,}0142.$$

b) A lányok úgy kerülnek túlsúlyba, ha 4, 5, 6 vagy 7 lány jut a döntőbe. Most nem érdemes áttérni a komplementer eseményre, hiszen ott is (0, 1, 2, 3) négy eset van. A megoldás:

$$\frac{\binom{17}{3}\cdot\binom{23}{4}}{\binom{40}{7}}+\frac{\binom{17}{2}\cdot\binom{23}{5}}{\binom{40}{7}}+\frac{\binom{17}{1}\cdot\binom{23}{6}}{\binom{40}{7}}+\frac{\binom{17}{0}\cdot\binom{23}{7}}{\binom{40}{7}}\approx 0{,}6736.$$

3849 A dobozban összesen 15 golyó van.

a) „Legalább egy színből legalább kettő” golyóhoz legalább négyet kell kivennünk. Ugyanis három golyó esetén még elképzelhető olyan eset, hogy mind a három különböző színű. A zöld golyók száma összesen 6, így:

$$\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{9}{2}}{\binom{15}{4}}\approx 0{,}3956.$$

b) Ha azt szeretnénk, hogy „mindhárom színből legyen legalább egy”, akkor legalább 12 golyót ki kell vennünk a 15-ből. Ugyanis ki lehet úgy venni 11-et, hogy közülük 5 piros és 6 zöld – ez így viszont csak két különböző szín. Mivel piros golyó összesen öt darab van, ezért a keresett „pontosan három piros” golyó van a kezünkben valószínűsége:

$$\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{10}{9}}{\binom{15}{12}}\approx 0{,}2198.$$



3850 Az öt zsebkendő kiemelése a tasakból hat elemi eseményt eredményez, például a kamillás zsebkendők oldaláról: 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5 kamillás elvételét. (Ennek megfelelően veszünk ki 5, 4, 3, 2, 1, 0 mentolost is, természetesen az egyes esetekben.)

Feladatunk először az összes eset felírása és kiszámítása. Jelölje k a kamillás zsebkendők számát:

$$P(k=0)=\frac{\binom{15}{0}\cdot\binom{25}{5}}{\binom{40}{5}}\approx 0{,}0807;\quad P(k=1)=\frac{\binom{15}{1}\cdot\binom{25}{4}}{\binom{40}{5}}\approx 0{,}2884;$$

$$P(k=2)=\frac{\binom{15}{2}\cdot\binom{25}{3}}{\binom{40}{5}}\approx 0{,}3670;\quad P(k=3)=\frac{\binom{15}{3}\cdot\binom{25}{2}}{\binom{40}{5}}\approx 0{,}2074;$$

$$P(k=4)=\frac{\binom{15}{4}\cdot\binom{25}{1}}{\binom{40}{5}}\approx 0{,}0519;\quad P(k=5)=\frac{\binom{15}{5}\cdot\binom{25}{0}}{\binom{40}{5}}\approx 0{,}0046.$$

Megjegyzés: A fenti események valószínűségeinek összege 1, mivel ezek az esetek teljes eseményrendszert alkotnak.

Ábrázoljuk az eredményeket oszlopdiagramon.

A feladat megoldását akár az oszlopdiagramról, akár a számított értékekről leolvashatjuk: legnagyobb valószínűséggel két darab kamillás zsebkendő lesz a kivett öt darab között.



3851 *a)* A megoldás sejthető: mivel szimmetrikusan szeretnénk tudni a kétféle kekszet, így várhatóan 50-50 darabnak kell lenni a dobozban mindkét fajtából. Sejtésünket többféleképpen is igazolhatjuk! Írjuk fel általánosan a valószínűséget kiszámító formát. Jelölje m a mogyorós csokik számát a 100 darabos mintában. Azt vizsgáljuk, milyen m-re lesz a legnagyobb az alábbi valószínűség $(1 < m < 99)$:

$$\frac{\binom{m}{2}\cdot\binom{100-m}{2}}{\binom{100}{4}}=\frac{\frac{m\cdot(m-1)}{2}\cdot\frac{(100-m)\cdot(99-m)}{2}}{\binom{100}{4}}=$$

$$=\frac{m\cdot(m-1)\cdot(100-m)\cdot(99-m)}{4\cdot\binom{100}{4}}.$$

A formula egy negyedfokú függvény maximumának vizsgálatára vezet – ilyet nem tanultunk jellemezni.

Megjegyzés: Emelt szinten deriváltak segítségével megtehetjük, bár ott sem lesz könnyű.

Természetesen a kifejezés értéke csak a számlálótól függ, a nevező konstans. Elegendő a számlálót tovább vizsgálnunk:

$$m\cdot(m-1)\cdot(100-m)\cdot(99-m).$$



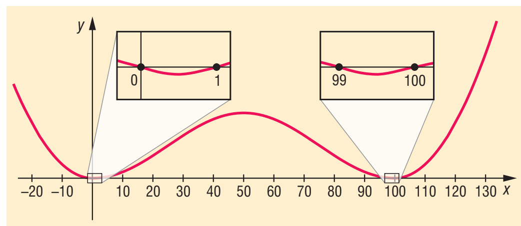
I. megoldás. Vegyük észre, hogy két tényezőben az m előjele (+), kettőben pedig (–). Ez adhat egy ötletet: ha nem szorzás, hanem összeadás lenne a zárójelek között, akkor m éppen kiesne! Milyen összefüggés „képes" szorzásból összeadást csinálni? Például a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség. Az összefüggést négy elemre írjuk fel (minden tényező pozitív):

$$M = \sqrt[4]{m \cdot (m-1) \cdot (100-m) \cdot (99-m)} \le \frac{m + m - 1 + 100 - m + 99 - m}{4} = \frac{198}{4} = 49{,}5 = A.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a tényezők megegyeznek (jelen esetben ez nem lehetséges). Mivel a számtani közép konstans, a mértani akkor közelíti meg a legjobban, ha az elemek a legközelebb kerülnek egymáshoz. Ez pedig akkor következik be, amennyiben $m = 50$.

II. megoldás. Ha elemezni „papíron" nem is tudjuk, számítógép segítségével azért ábrázolhatjuk és elemezhetjük is a valós számokon értelmezett negyedfokú kifejezésünket:

$$f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (100-x) \cdot (99-x).$$



A függvénynek négy zérushelye van:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 99, \quad x_4 = 100.$$

Az első két és utolsó két zérushely között negatív az értéke, a többi nyitott intervallumban pozitív.

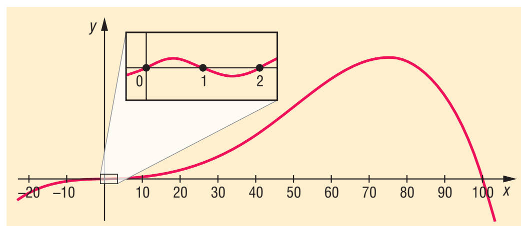
Az ábrán is szépen látszik, de a számítógép is megerősíti a sejtésünket: $x = 50$-nél van a függvény lokális szélsőértéke.

b) Ebben a részben kissé módosul a formula:

$$\frac{\binom{m}{3} \cdot \binom{100-m}{1}}{\binom{100}{4}} = \frac{\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{6} \cdot (100-m)}{\binom{100}{4}} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (100-m)}{6 \cdot \binom{100}{4}}.$$

Az előző részben alkalmazott első megoldás most nem működik, azonban a számítógép segítségét igénybe vehetjük. A vizsgálandó minden valós számon értelmezett függvény:

$$f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (100-x).$$



A függvénynek most is négy zérushelye van:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 100.$$

Az első és a második, valamint a harmadik és negyedik zérushely között pozitív, a többi nyitott intervallumban negatív az értéke.

Az elemzést bízzuk a számítógépre. A keresett szélsőértékre $x \approx 75{,}25$ adódik. Ezt már le tudjuk ellenőrizni számológéppel is, a megoldás: 75 mogyorós csoki van a dobozban.

3852 Először is adjuk meg az összes esetek számát, ami 1880-ból 20 szem barack kiválasztása esetén:

$$\binom{1880}{20}.$$

Másodszor határozzuk meg, melyik kategóriájú barackból hány szemet szedtünk:

I. kategóriájúból: $1880 \cdot 0{,}50 = 940$ darabot;

II. kategóriájúból: $1880 \cdot 0{,}35 = 658$ darabot;

III. kategóriájúból: $1880 \cdot 0{,}15 = 282$ darabot.



A feladat kérdése az, hogy mekkora valószínűséggel lesz a kapott 20 szem barackból I. kategóriájú 10, II. kategóriájú 8 és III. kategóriájú 2.

Vagyis a „kedvező” esetekben 940 darabból választunk 10-et, 658-ból választunk 8-at és ugyanakkor 282-ből választunk 2-t. Már fel tudjuk írni a kedvező esetek számát is, tehát a kérdezett valószínűség:

$$\frac{\binom{940}{10}\cdot\binom{658}{8}\cdot\binom{282}{2}}{\binom{1880}{20}}\approx 0{,}0414.$$

Megjegyzés: Ha egy összességben kétfajta elemből veszünk visszatevés nélkül mintát, az összes lehetséges eredményhez tartozó valószínűségeket *hipergeometriai,* ha többfajta elemből vesszük a mintát, *polihipergeometriai eloszlásnak* nevezzük.

Valószínűségi játékok gráfokon (kiegészítő anyag) – megoldások

3853 $P(A)=\frac{1}{3},\quad P(B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{15},\quad P(C)=\frac{2}{3}\cdot(0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}4\cdot 0{,}7)\approx 0{,}2867.$

3854 $0{,}3x<0{,}27 \quad\Rightarrow\quad x<0{,}9.$

3855 $0{,}6x+0{,}4\cdot 2x=0{,}42 \quad\Rightarrow\quad x=0{,}3.$

3856 $0{,}5\cdot 0{,}8+0{,}5\cdot 0{,}05=0{,}425.$

3857 $\frac{2}{3}\cdot 0{,}9=0{,}6.$

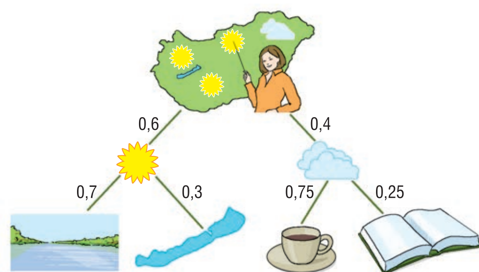
3858 *a)* A lehetőségek az ábrán láthatók.

b) $P(\text{Deseda tó})=0{,}6\cdot 0{,}7=0{,}42;$

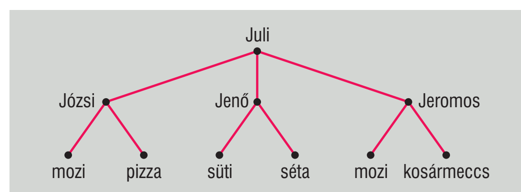
$P(\text{Balaton})=0{,}6\cdot 0{,}3=0{,}18;$

$P(\text{kávéház})=0{,}4\cdot 0{,}75=0{,}3;$

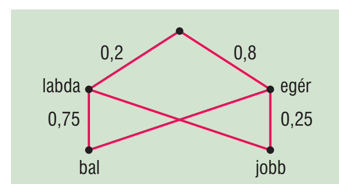
$P(\text{könyvtár})=0{,}4\cdot 0{,}25=0{,}1.$



3859 $P(\text{mozi})=\frac{1}{3}\cdot 0{,}5+\frac{1}{3}\cdot 0{,}5=\frac{1}{3}.$

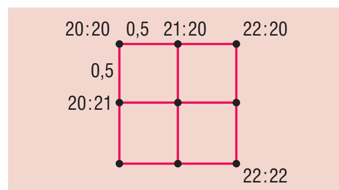


3860 $P(\text{bal})=0{,}2\cdot 0{,}75+0{,}8\cdot 0{,}75=0{,}75.$



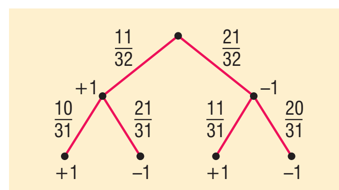


3861 $P(22:22) = 6 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}375.$



3862 *a)* A gráf az ábrán látható.

b) $1 - \frac{21}{32} \cdot \frac{20}{31} \approx 0{,}5767.$



3863 Kiindulásul a 3855. feladat válaszában egyetlen jelet kell átírnunk:

$$0{,}6x + 0{,}4 \cdot 2x > 0{,}42.$$

Innen $x > 0{,}3$. Ám még nem végeztünk a feladattal. Az x valószínűséget jelöl, így természetesen adódik: $1 \geq x$.

Még mindig nem végeztünk! A $0{,}6x + 0{,}4 \cdot 2x$ is valószínűséget jelöl, ezért $1 \geq 0{,}6x + 0{,}4 \cdot 2x$, azaz $\frac{5}{7} \geq x$.

Most már végeztünk? Nem! Ugyanis még $2x$ is valószínűséget jelöl: $0{,}5 \geq x$.

No, most már tényleg végeztünk: $0{,}5 \geq x > 0{,}3$.

3864 *a)* Tekintsük az ábrát. A pontok között csak jobbra vagy lefelé léphetünk. A felső sorban azt látjuk, amikor harcosunk nyer, a függőlegesen lógó gombócok a vesztett mérkőzések eredményei. Az élekre most is felírtuk a feladatban meghatározott valószínűségeket.



Az *a)* részkérdésben így össze kell szoroznunk a felső sor értékeit:

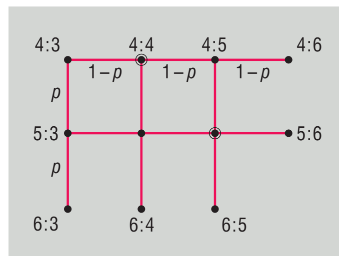
$$P(\text{mindent megnyer}) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}0384.$$

b) Az előzőhöz hasonlóan az ábráról leolvashatjuk:

$$P(\text{3. meccsen veszít}) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}288.$$

c) Mivel négy meccset megnyert, így csak 1 vagy 0 meccset bukhat el ötből, azaz harcosunk erőssége 4 vagy 5.

3865 Mielőtt a kérdésekre válaszolnánk, rajzoljuk fel a játék gráfját. Egy vízszintes jobb lépés Batka manó pontszerzését, egy függőleges lefelé lépés Biga csiga pontszerzését hivatott jelezni. Más lépés az éleken nem megengedett.



Biga csiga p valószínűséggel ér el pontot, Batka manóra pedig $1 - p$ valószínűség marad.

Az utolsó sorban olvasható feltétel szerint:

$$P(4:6) = (1-p)^3 = 0{,}064 \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}4.$$

Ezek után válaszolhatunk a kérdésekre.



a) $P(6:3) = p^2 = 0{,}16.$

b) Ebben az esetben először el kell jutnunk az 5:4 pontba, majd ebben az állásban Biga csigának kell még egy pontot szereznie. Az 5:4 állást kétféleképpen kaphatjuk meg. Egyszer kell Batka manónak és egyszer Biga csigának pontot elérnie, sorrendjük azonban kétféle is lehet. Ezért:

$$P(6:4) = 2p^2 \cdot (1-p) = 0{,}192.$$

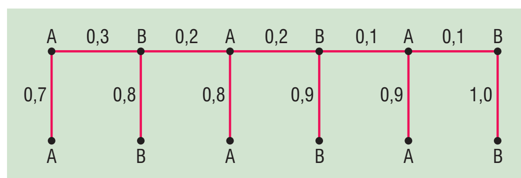
c) Kétféle döntetlen állás is kialakulhat: 4:4 és 5:5 (külön jelölt állások a gráfban). A 4:4 álláshoz Batka manónak egy játékot kell megnyernie, ennek valószínűsége:

$$P(4:4) = 0{,}6.$$

Az 5:5-höz azonban Batka manónak már kétszer kell játszmát nyerni, míg Biga csigának egyet. Ezen győzelmeket háromféle sorrendben érhetik el:

$$P(5:5) = 3 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}432.$$

3866 Elsőnek most is írjuk fel a játék gráfját. Az alsó sorban azt látjuk, hogy ki találta el a tábla közepét. Vízszintesen akkor lépünk, ha az illető játékos nem találta el a középkört. A valószínűségeket a szövegből olvashattuk ki. Lássuk a feladat kérdéseit!



a) Végig akkor játsszák, ha eljutunk a gráf utolsó B betűjéig:

$$P(\text{végigjátsszák}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}0 = 0{,}00012.$$

b) Andor három különböző esetben nyerhet.

Ha rögtön nyer:

$$P_1(\text{A}) = 0{,}7.$$

Ha Boldizsár ront, majd Andor nyer:

$$P_2(\text{A}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}048.$$

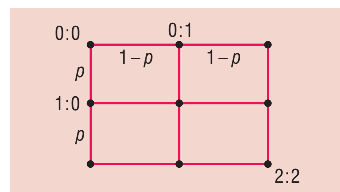
Mindketten kétszer rontanak, de Andor harmadszorra talál:

$$P_3(\text{A}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}00108.$$

A fenti esetek kizárják egymást, ezért eredményeiket összeadhatjuk:

$$P(\text{Andor nyer}) = P_1(\text{A}) + P_2(\text{A}) + P_3(\text{A}) = 0{,}74908.$$

3867 Tételezzük fel, hogy az erősebb csapat p, a gyengébb $1-p$ valószínűséggel nyer meg egy mérkőzést, $p > 1-p$. Tekintsük a játék gráfját. Hogy a bal felső pontból eljussunk a jobb alsó pontba, kettőt kell jobbra és kettőt lefelé lépni. Ilyen lépéseket összesen $\dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$-féleképpen tehetünk (ismétléses permutáció). A kérdéses egyenlet:



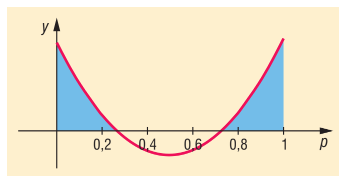
$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot p^2 \cdot (1-p)^2 < 0{,}24.$$

Egyszerűsítsünk 6-tal, és vonjunk négyzetgyököt mindkét oldalból (p és $1-p$ is nemnegatív):

$$p \cdot (1-p) < 0{,}2,$$

$$0 < p^2 - p + 0{,}2.$$





A parabola zérushelyei:

$$p_1 \approx 0{,}7236 \quad \text{és} \quad p_2 \approx 0{,}2764,$$

tehát az egyenlőtlenség megoldása:

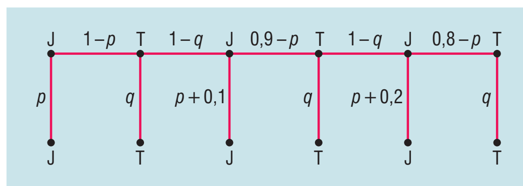
$$p < 0{,}2764 \quad \text{vagy} \quad p > 0{,}7236.$$

Mivel $p > 1 - p$, ezért csak a $p > 0{,}7236$ megoldást fogadjuk el.

Most már válaszolhatunk a kérdésre is: a két csapat által megszerzett győzelem valószínűségeinek aránya egy-egy mérkőzésen legalább

$$\frac{p}{1-p} > \frac{0{,}7236}{0{,}2764} \approx 2{,}618.$$

3868 Jane és Tarzan egymástól teljesen függetlenül lasszózzák meg Bagirát, ezért jelölje Jane találati valószínűségét p, Tarzanét pedig q. A szöveg szerint Jane még javul is a játék során, körönként 0,1-et. A kapott gráf az ábrán látható.



Írjuk fel egyenlettel az ismert győzelmi esélyeket.

Tarzan győz az első körben:

$$(1-p)\cdot q = 0{,}48. \qquad \left(= \frac{12}{25}\right)$$

Jane győz a harmadik körben:

$$(1-p)\cdot(1-q)\cdot(0{,}9-p)\cdot(1-q)\cdot(p+0{,}2) = 0{,}03584.$$

Tarzan győz a harmadik körben:

$$(1-p)\cdot(1-q)\cdot(0{,}9-p)\cdot(1-q)\cdot(0{,}8-p)\cdot q = 0{,}032256.$$

Ez három egyenlet két ismeretlenre, ami akár sok is lehetne. Azonban mivel elég magas fokú egyenleteink vannak, valószínűleg jól jön. Nézzük meg közelebbről az utolsó két egyenletet! Észrevehetjük, hogy az első négy tényezőjük megegyezik. Érdemes őket elosztanunk egymással, mondjuk az elsőt a másodikkal:

$$\frac{p+0{,}2}{(0{,}8-p)\cdot q} = \frac{10}{9}.$$

Tüntessük el a törteket is:

$$9\cdot(p+0{,}2) = 10\cdot(0{,}8-p)\cdot q.$$

Kissé alakítsuk át az első egyenletet, és vegyük hozzá az előbbihez:

$$\left.\begin{aligned} 9\cdot(p+0{,}2) &= 10\cdot(0{,}8-p)\cdot q \\ 12 &= 25\cdot(1-p)\cdot q \end{aligned}\right\}.$$

Már nem is annyira csúnya az egyenletrendszer! Osszuk el a felső egyenletet az alsóval:

$$\frac{3\cdot(p+0{,}2)}{4} = \frac{2\cdot(0{,}8-p)}{5\cdot(1-p)}.$$

Szorozzunk a közös nevezővel:

$$15\cdot(p+0{,}2)\cdot(1-p) = 8\cdot(0{,}8-p).$$

Fejtsük ki a zárójeleket, majd rendezzünk egy oldalra:

$$0 = 15p^2 - 20p + 3{,}4.$$

A megoldóképletből:

$$p_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4\cdot 15\cdot 3{,}4}}{30} = \begin{cases} p_1 = 1{,}13; \\ p_2 = 0{,}2. \end{cases}$$



Az első megoldást nem fogadhatjuk el, hiszen p (≤ 1) valószínűséget jelöl, azonban a második jó. Innen $q = 0{,}6$.

Tehát Jane $0{,}2$; Tarzan $0{,}6$ valószínűséggel lasszózza meg a párducot.

Most pihenjünk egyet, és próbáljunk meg válaszolni a feladat kérdésére.

A harmadik kör után akkor nincs Bagira befűzve, ha a felső sor utolsó pontjában Tarzan sem találja el. Azaz:

$$P(\text{Bagira még mindig szabad}) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}021504.$$

Ez azt mutatja, Bagirát nagyon nagy valószínűséggel befogja valaki a három körben.

Valóság és statisztika – megoldások

3869 11 óra 12 perckor.

3870 4,65%-a.

3871 Nem. Ha a még össze nem számolt 20% voks a másiké, akkor 52 : 48%-ra a másik győz.

3872 Az eddig megszámolt szavazatok 62,5%-át + 1 szavazatot.

3873 Az összes szavazat $83\frac{1}{3}$%-át + 1 szavazatot.

3874 260%-ot.

3875 200 g termékhez 220 g marhahús szükséges, és 11 g „házi fűszert” tartalmaz. Azaz 5%-ot.

3876 Mivel $x \cdot 0{,}35 = 28$, így az üzletház $x = 80$ boltot foglal magában, amiből $80 \cdot 0{,}65 - 2 = 50$ árul ruhát.

3877 $18 \cdot \dfrac{0{,}7 \cdot 0{,}5}{0{,}6 \cdot 0{,}4} = 26{,}25.$

Vegyes feladatok – megoldások

3878 *a)* $\dfrac{6}{25} = 0{,}24.$ *b)* Legalább negyvenet.

3879 0,3.

3880 $1 - \dfrac{2 \cdot 4!}{5!} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6.$

3881 $1 - 0{,}7^6 \approx 0{,}88.$

3882 0,125.

3883 $0{,}99^8 \approx 0{,}9227.$

3884 *a)* $\left(\dfrac{7}{20}\right)^{14} \cdot \left(\dfrac{13}{20}\right)^{14} \approx 9{,}948 \cdot 10^{-10};$ *b)* $\dbinom{28}{14} \cdot \left(\dfrac{7}{20}\right)^{14} \cdot \left(\dfrac{13}{20}\right)^{14} \approx 0{,}04.$



3885 $1-\left[\binom{9}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\binom{9}{8}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1+\binom{9}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0\right]\approx 0{,}9917.$

3886 *a)* $\binom{7}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^5\approx 0{,}2613;$

b) $\binom{7}{4}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3+\binom{7}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2+\binom{7}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^6\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^1+\binom{7}{7}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^0\approx 0{,}44462.$

3887 *a)* $\dfrac{\binom{8}{4}}{\binom{32}{4}}\approx 0{,}0019;$ *b)* $\dfrac{\binom{8}{3}\cdot\binom{24}{1}}{\binom{32}{4}}\approx 0{,}0374;$ *c)* $1-\dfrac{\binom{8}{4}}{\binom{32}{4}}\approx 0{,}9981.$

3888 $\dfrac{\binom{25}{2}\cdot\binom{75}{8}}{\binom{100}{10}}\approx 0{,}2924.$

3889 $P(s=0)=\dfrac{\binom{4}{0}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}=\dfrac{1}{3};$ $P(s=1)=\dfrac{\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}}=\dfrac{8}{15};$ $P(s=2)=\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}}=\dfrac{2}{15}.$

3890 P(meggyes rétes vagy dobostorta) = P(meggyes) + P(dobos) = $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$.

3891 $1-P$(nem kell várni Esztire) $=1-0{,}6\cdot 0{,}9=0{,}46$.

3892 Nem lehet:

$$P(B+C)=(1-p)^2+p^2=2p^2-2p+1<0{,}4.$$

De minden $p\in\mathbb{R}$ esetben:

$$2p^2-2p+0{,}6>0.$$